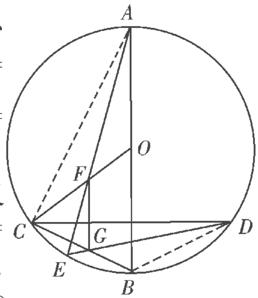
数学问题解答

2001年10月号问题解答
(解答由问题提供人给出)

1336 ⊙O中，直径AB垂直于非直径的弦CD，弦AE与半径OC交于点F，弦DE交弦BC于点G. 求证：FG ∥ AB.

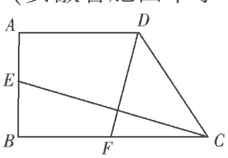
(四川省普格县养窝农场子弟学校 王承宣 615302)

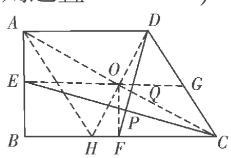


证明 如图，连结BD、CA. ∵ $AB \perp CD$，∴ $CA = DA$，$CB = BD$，∴∠COA = ∠CBD，又 AO = CO，∴∠ACF = ∠GCD，又∠EAO = ∠EDB，∠CAF = ∠CDE，∴△ACO ∽ △CBD，△AOF ∽ △DBG，△ACF ∽ △DCG，∴ $\frac{CF}{CG} = \frac{AC}{CD} = \frac{AO}{BD} = \frac{FO}{GB}$，即$\frac{CF}{FO} = \frac{CG}{GB}$，故 FG ∥ AB.

1337 直角梯形$ABCD$中，AD ∥ BC，AB ⊥ BC，E为AB的中点，F为BC的中点，且$AD = DC$，求证：$CE \perp DF$.

(安徽省肥西中学 刘运宜 231200)





证明 设CE与DF的交点为P，过E作EG ∥ BC交DC于点G，连结CA交EG于点O、交DF于点Q，连结DO并延长交BC于点H，再连AH、OF.

∵ E是AB的中点，且EG ∥ BC

∴ EO既是△ABC的中位线，又是梯形ABHD的中位线

∴ $OA = OC$，$EO = \frac{1}{2}(BH + AD)$

∵ $AD = DC$，∴ $DH \perp AC$

∵ ∠DAC = ∠DCA，而∠DAC = ∠HCA

∴ ∠DCA = ∠HCA，∴ $OD = OH$

∴ 四边形$AHCD$是菱形，∴ $AD = HC$

又∵ O、F分别是AC、BC的中点

∴ OF是△ABC的中位线，∴OF ∥ AB

而$AB \perp BC$，∴$OF \perp BC$，∴$OF \perp EG$

在△ABC和△ODA中

∵ ∠ACB = ∠DAO，∠ABC = 90° = ∠DOA

∴ △ABC ∽ △DOA，∴ $\frac{BC}{AB} = \frac{OA}{OD}$

在△EOC和△FOD中

∵ $\frac{OE}{OF} = \frac{\frac{1}{2}(BH + AD)}{\frac{1}{2}AB} = \frac{BH + CH}{AB} = \frac{BC}{AB}$

$\frac{OC}{OD} = \frac{OA}{OD}$，∴ $\frac{OE}{OF} = \frac{OC}{OD}$

而∠EOF + ∠COF = ∠DOC + ∠COF

即∠EOC = ∠FOD，∴△EOC ∽ △FOD

∴ ∠OCE = ∠ODF，

又∵∠OQD = ∠PQC，∴∠CPQ = ∠DOQ

而∠DOQ = 90°，∴∠CPQ = 90°，

即 $CE \perp DF$.

1338 设$f(x)$是定义在实数集上的有界函数，且对任意$x \in R$恒有：$f(x + a_1) + f(x + a_4) = f(x + a_2) + f(x + a_3)$，其中$a_1, a_2, a_3, a_4$是等差数列，其公差$d \neq 0$. 求证：$f(x)$是周期函数.

(四川省越西县越西中学 熊昌进 616650)

证 $f(x + a_4) - f(x + a_3) = f(x + a_2) - f(x + a_1)$，即

$f(x + 3d) - f(x + 2d) = f(x + d) - f(x)$. ①

$f(x + 5d) - f(x + 4d) = f(x + 3d) - f(x + 2d)$，

则$f(x + 5d) - f(x + 4d) = f(x + d) - f(x)$， ②

……，

$f(x + (2n + 1)d) - f(x + 2nd) = f(x + d) - f(x)$. ⓝ

由①得：

$f(x + 4d) - f(x + 3d) = f(x + 2d) - f(x + d)$， ①′

$f(x + 6d) - f(x + 5d) = f(x + 2d) - f(x + d)$， ②′

…，

$f(x + (2n + 2)d) - f(x + (2n + 1)d) = f(x + 2d) - f(x + d)$. ⓝ′

由① + ② + … + ⓝ + ①′ + ②′ + … + ⓝ′ 得：

$f(x + (2n + 2)d) - f(x + 2d) =$

$n[f(x+2d)-f(x)]$.

上式对所有 $n\in N$ 都成立，又 $f(x)$ 有界，则上式左边有界，故只能有上式右边的 $f(x+2d)-f(x)=0$，即 $f(x+2d)=f(x)$ 成立.

1339　对 $a,b,c\in N$，$a,b,c\leqslant 9$，求使数列 $\overline{ab}$，$\overline{aacb}$，$\overline{aaaccb}$，$\overline{aaaacccb}$，…… 中每个数都是完全平方数的 a,b,c.

（新疆石河子大学师范学院数学系　孙风军　832003）

解　由 $\overline{\underbrace{aa\cdots a}_{n个a}\underbrace{cc\cdots c}_{n-1个c}b}$

$=a\times 10^n(10^{n-1}+\cdots+10+1)+c(10^{n-1}+\cdots+10+1)+b-c$

$=\frac{1}{9}[a\times 10^{2n}-(c-a)10^n+9b-10c]$.

要使上式为一个完全平方，必有 $a=1$ 或 $a=4$.

(ⅰ) 当 $a=1$ 时，由 $\left(\frac{c-a}{2}\right)^2=9b-10c$，得 $b=6,c=5$.

(ⅱ) 当 $a=4$ 时，由 $\left(\frac{c-a}{4}\right)^2=9b-10c$，得 $b=9,c=8$.

故得此问题的解是 $\begin{cases}a=1\\b=6\\c=5\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=4\\b=9\\c=8\end{cases}$.

1340　锐角 $\triangle ABC$ 中，外接圆半径 $R=1$，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的对应边为 a、b、c，求证：

$$\frac{a}{1-\sin A}+\frac{b}{1-\sin B}+\frac{c}{1-\sin C}\geqslant 18+12\sqrt{3}$$

当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时等号成立.

（西安交大附中　樊益武　崔柏　710049）

证明　由正弦定理易知，原不等式等价于：

$$\sum\frac{\sin A}{1-\sin A}\geqslant 9+6\sqrt{3}$$

(其中 $\sum$ 表示循环和，下同)

$\because$ $\frac{\sin A}{1-\sin A}=\frac{\sin A(1+\sin A)}{1-\sin^2 A}$

$=\tan^2 A+\tan A\sqrt{1+\tan^2 A}$

$\therefore$ $\sum\frac{\sin A}{1-\sin A}=\sum\tan^2 A+\sum\tan A\sqrt{1+\tan^2 A}$　(1)

$\because$ $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$

$\therefore$ $\tan B\tan C=1+\frac{\tan B}{\tan A}+\frac{\tan C}{\tan A}$

$\therefore$ $\sum\tan B\tan C=3+\sum\left(\frac{\tan B}{\tan C}+\frac{\tan C}{\tan B}\right)\geqslant 9$

$\therefore$ $\sum\tan^2 A\geqslant\sum\tan B\tan C\geqslant 9$　(2)

又 $\tan A\sqrt{1+\tan^2 A}=\sqrt{\tan^2 A+\tan^4 A}$

$=\frac{1}{\sqrt{12}}\sqrt{(\tan^2 A+\tan^4 A)(3+9)}$

$\geqslant\frac{1}{\sqrt{12}}(\sqrt{3}\tan A+3\tan^2 A)$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\tan^2 A+\frac{1}{2}\tan A$　(3)

$\because$ $\sum\tan A\geqslant 3\sqrt[3]{\tan A\tan B\tan C}=3\sqrt[3]{\sum\tan A}$

即 $\sum\tan A\geqslant 3\sqrt{3}$　(4)

由(1)、(2)、(3)、(4)得

$\sum\frac{\sin A}{1-\sin A}$

$\geqslant\sum\tan^2 A+\sum\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\tan^2 A+\frac{1}{2}\tan A\right)$

$=\frac{1}{2}[(2+\sqrt{3})\sum\tan^2 A+\sum\tan A]$

$\geqslant\frac{1}{2}[9(2+\sqrt{3})+3\sqrt{3}]=9+6\sqrt{3}$

由证明不难看出取等号的条件.

2001 年 11 月号问题

(来稿请注明出处——编者)

1341　锐角 $\triangle ABC$ 中有内接 $\triangle DEF$，$FD\perp BC$ 于 D，$DE\perp AC$ 于 E，$EF\perp AB$ 于 F，求证：$S_{\triangle ABC}\geqslant 3S_{\triangle DEF}$

（武汉华中理工大学西十四舍 5 号　黄元兵　430074）

1342　$\triangle ABC$ 中，$BC=a$，$CA=b$，$AB=c$，求证：

$$\frac{a+b}{b+c-a}+\frac{b+c}{c+a-b}+\frac{c+a}{a+b-c}\geqslant 6$$

（湖北黄石二中　杨志明　435000）

1343　$\triangle ABC$ 中，BE、CF 为 AC、AB 边上的高，$FP\perp BC$ 于 P，$FQ\perp AC$ 于 Q，$EM\perp BC$ 于 M，$EN\perp AB$ 于 N，$FP+FQ=CF$，$EM+EN=BE$，求证：$\triangle ABC$ 为等边三角形.

（厦门九中　陈四川　361004）

1344　若 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为满足条件 $a_1+a_2+\cdots+a_n=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}$ 的正数，求证：对任何 $n\in N$ 有

$$\frac{1}{a_1+n-1}+\frac{1}{a_2+n-1}+\cdots+\frac{1}{a_n+n-1}\leqslant 1$$

（南昌大学附中　宋庆　330029）

1345　折迭一张长方形纸片，使它的一个顶点落在与该顶点不相邻的边上，如何折才能使折缝最长？最短？

（合肥市旅游学校　朱长青　230011）